۱۳۹۲/۸/۹ : ریاضی مهندسی پیشرفته

۲۸) صورت کلی مسأله بهینه سازی را دوره کنید؟

$$\underline{\dot{X}(t)} = A\,\underline{X(t)} + B\,\underline{u(t)}$$

$$O.F. = \| X(t_f) - r(t_f) \|_H^2 + \int_0^{t_f} \left(\|\underline{u(t)}\|_Q^2 + \| X(t) - r(t) \|_K^2 \right) dt$$

$U(t)$ تعیین کنیم که O.F. مینیمم شود.

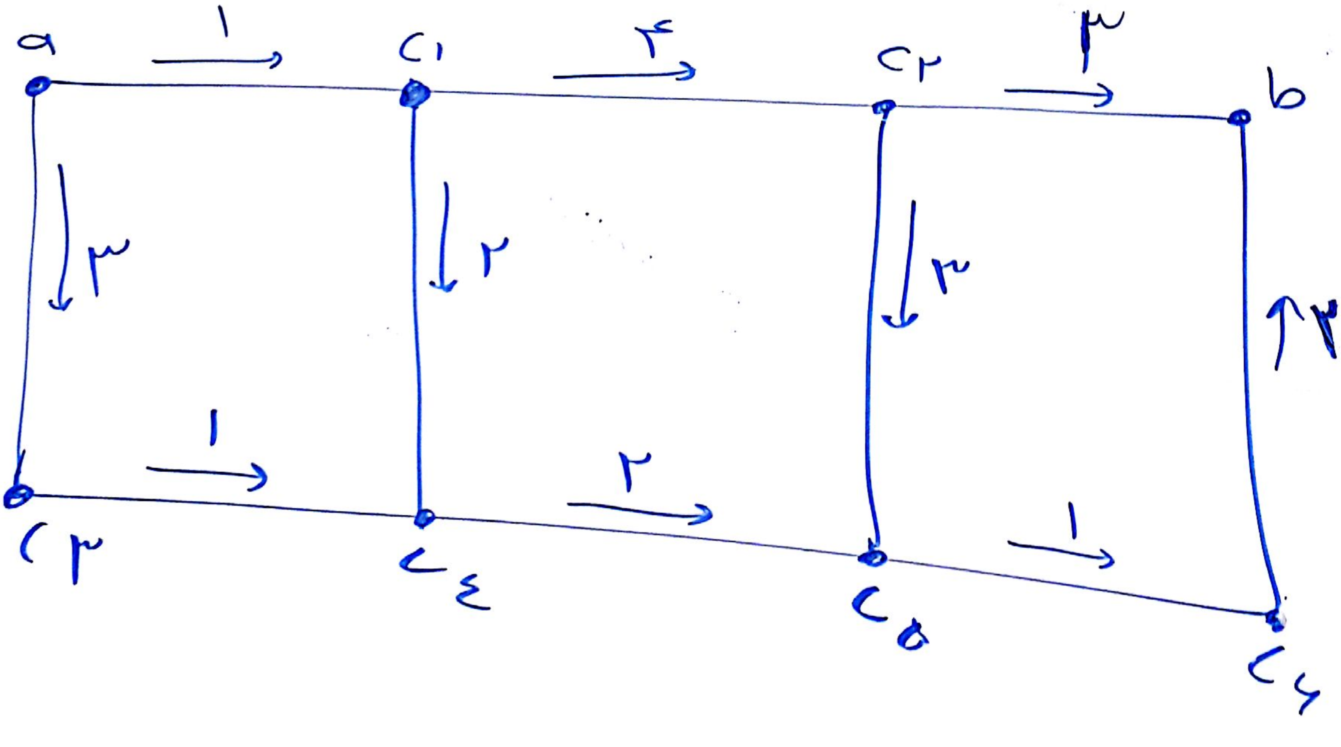
۱/۹ برای حل مسأله قبل نیاز به حل مسأله زیر

است:

در شکل زیر هزینه هر راه نوشته شده است.

می‌خواهیم هزینه برای رفتن از a به b چقدر

است:



از ته مسیر شروع می کنیم

هزینه مینیم برای رسیدن b

$C_m(c_6) = 2$

$C_m(c_2) =$ نمی شود چون ۵ نداریم

$C_m(c_5) = 1 + C_m(c_6) = 1 + 2 = 3$

$$C_m(c_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3 = 3 \\ 3 + C_m(c_5) = 6 \end{array} \right\} = 3$$

$C_m(c_4) = 2 + C_m(c_5) = 2 + 3 = 5$

$$C_m(c_1) = \left\{ \begin{array}{l} 4 + C_m(c_2) = 4 + 3 = 7 \\ 2 + C_m(c_4) = 2 + 5 = 7 \end{array} \right\} = 7$$

$$C_m(C_۳) = ۱ + C_m(C_۴) = ۱ + ۵ = ۶$$

$$C_m(a) = \min \left\{ \begin{array}{l} ۱ + C_m(C_۱) = ۱ + ۷ = ۸ \\ ۳ + C_m(C_۳) = ۳ + ۶ = ۹ \end{array} \right\} = ۸$$

$$C_m(a) = ۸$$

مسیر

$$\begin{tikzcd}
 & & ۳ & & & \\
 & & C_۲ \arrow[u] \arrow[r, dash] & b & & \\
a \arrow[r] \arrow[d] & C_۱ \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[d] & & & & \\
۸ & ۷ & C_۴ \arrow[r, dash] \arrow[d] & C_۵ \arrow[r, dash] \arrow[d] & C_۶ \arrow[r, dash] \arrow[d] & b \\
 & & ۵ & ۳ & ۲ &
\end{tikzcd}$$

۸۰) آیا می توان در مسأله قبل به جای از ته شروع کردن از سر شروع می کردم؟

بله. ولی کار بیخود بود. نگاه کنید:

$$C_m(a) = \min \begin{cases} 1 + C_m(c_1) \\ 3 + C_m(c_3) \end{cases}$$

باید $C_m(c_3)$ و $C_m(c_1)$ حساب کنم.

$$C_m(c_1) = \min \begin{cases} 4 + C_m(c_2) \\ 2 + C_m(c_4) \end{cases}$$

- - - - - - باید

راه قبل بهتر است

۸۱) در تابع بازگشتی زیر حاصل $a_۴$ چند است؟

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + ۲ \qquad a(۰) = ۱$$
$$a(۱) = ۵$$

راه اول:
$$\begin{cases} n=۲ \Rightarrow a_۲ = a_۱ + a_۰ + ۲ = ۸ \\ n=۳ \Rightarrow a_۳ = a_۲ + a_۱ + ۲ = ۱۵ \\ n=۴ \Rightarrow a_۴ = a_۳ + a_۲ + ۲ = ۲۵ \end{cases}$$

راه دوم: $a_۴ = a_۳ + a_۲ + ۲ = ۲۵$

$$a_۳ = \underbrace{a_۲ + a_۱}_{۸ \quad ۵} + ۲ = ۱۳ \qquad \underbrace{a_۱ + a_۰ + ۲}_{۸}$$

$$۱۳$$

راه دوم بهتر است چون متغیرهایی حساب می‌شوند که نیاز است

۸۲) در رابطه $a_n = 2a_{n-2} + 1$ و $a_0 = 5$ و $a_1 = 1$ حاصل a_4 چند است؟

روش اوّل
$$\begin{cases} a_2 = 2a_0 + 1 = 11 \\ a_3 = 2a_1 + 1 = 3 \\ a_4 = 2a_2 + 1 = 23 \end{cases}$$

روش دوّم
$$a_4 = 2\underbrace{a_2}_{2\underbrace{a_0}_{5}+1=11} + 1 = 23$$

روش دوّم کمتر شد. چرا؟ چون اصلاً نیازی به محاسبه a_3 نبود. این را روش دوّم بفهمید.

۸۳) راه حل گفته شده برای می نیمم کردن هزینه را به صورت ریاضی بیان کنید؟

$\left\{ \begin{array}{c} \text{می نیمم هزینه از} \\ a \text{ به } b \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{c} \text{هزینه از } a \text{ به نقطه بعدی} \\ + \\ \text{می نیمم هزینه از نقطه بعدی} \\ \text{به } b \end{array} \right\}$

$J(m, n)$ — هزینه از m به n ،

$J^{*}(m, n)$ — می نیمم هزینه از m به n

$a = x_0$ — شروع مسیر

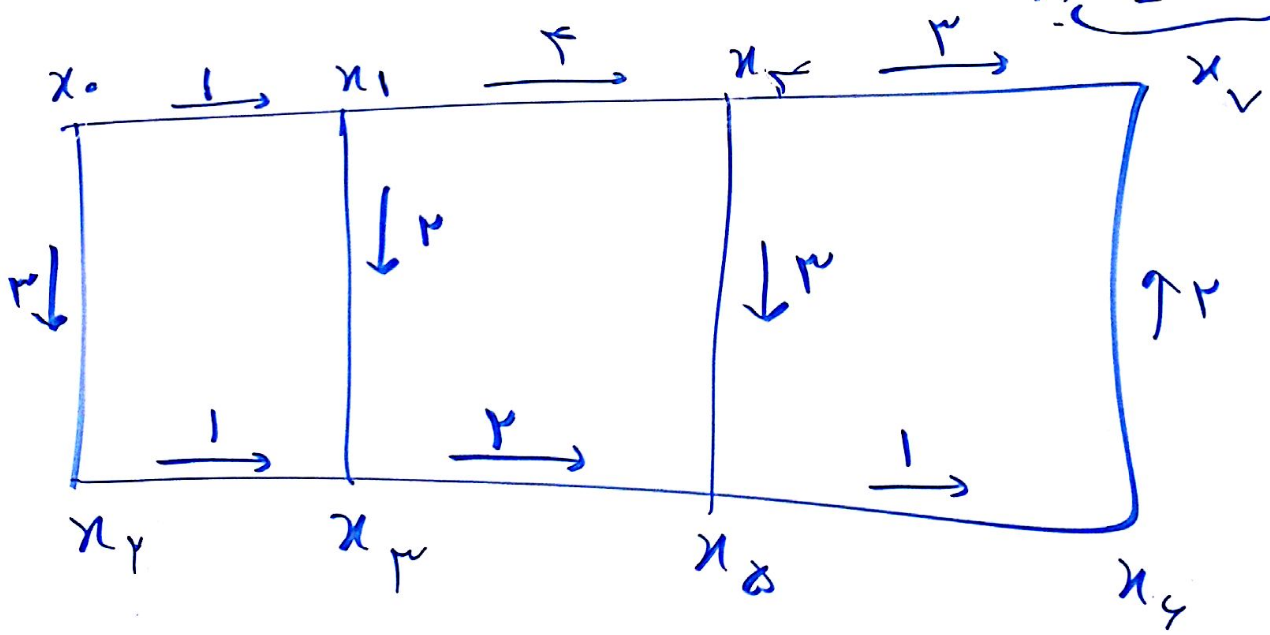
$b = x_n$ — انتهای مسیر

$$J^*(x_0, x_n) = \min_{\text{(روی حالتهای مختلف } x_1)} \{ J(x_0, x_1) + J^*(x_1, x_n) \}$$

(روی حالتهای مختلف x_1)

---

۸۴ مسأله زیر را با رابطه بازگشتی حل کنید. هدف پیدا کردن مینیمم هزینه برای رفتن از x_0 به x_7 است؟



$$J^*(x_0, x_7) = \min \begin{cases} \overbrace{J(x_0, x_1)}^{1} + J^*(x_1, x_7) \quad \text{(A)} \\ \underbrace{J(x_0, x_2)}_{2} + J^*(x_2, x_7) \quad \text{(B)} \end{cases}$$

$$\text{(A)} \quad J^*(x_1, x_7) = \min \begin{cases} \overbrace{J(x_1, x_4)}^{4} + J^*(x_4, x_7) \quad \text{(C)} \\ \underbrace{J(x_1, x_3)}_{2} + J^*(x_3, x_7) \quad \text{(D)} \end{cases}$$

$$\text{(C)} \quad J^*(x_4, x_7) = \min \begin{cases} \overbrace{J(x_4, x_7)}^{3} + \cancelto{0}{J^*(x_7, x_7)} \\ \underbrace{J(x_4, x_5)}_{3} + J^*(x_5, x_7) \quad \text{(E)} \end{cases}$$

$$\text{(E)} \quad J^*(x_5, x_7) = \min \left\{ \overbrace{J(x_5, x_6)}^{1} + J^*(x_6, x_7) \quad \text{(F)} \right.$$

$$\text{(F)} \quad J^*(x_6, x_7) = \min \left\{ \overbrace{J(x_6, x_7)}^{2} + \cancelto{0}{J^*(x_7, x_7)} \right\} = 2$$

Ⓔ $J^*(x_5, x_7) = 3$

Ⓒ $J^*(x_4, x_7) = \min\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = 3$

---

۸۵ چرا معادلات حالت به مسأله چند حالته جهت دار (شکل قبلی) شبیه است؟

جهت دار ⟸ زمان داریم که همواره به سمت جلو است

چند حالته ⟸ با هر حالت ورودی در یک زمان حالتهای مختلفی برای X ها نتیجه می شود.

Generated by CamScanner from intsig.com

۸۷ مسالهٔ زیر را گسسته سازی کنید؟

$$x'(t) = 2x(t) + u(t)$$

$$O.F. = (x(1) - 1{,}5)^2 + \int_0^1 u(t)^2\, dt$$

$$\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le x(t) \le 2 \\ -1 \le u(t) \le 1 \end{cases}$$

$$\Delta t = \frac{1-0}{n}$$

ابتدا باید گسسته سازی:

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times (2x(t) + u(t)) \\ O.F. = (x(1) - 1{,}5)^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(u^2(0) + 2u^2(\Delta t) + \cdots + 2u^2((n-1)\Delta t) + u^2(n\Delta t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x((i+1)\Delta t) = x(i\Delta t) + \Delta t\,(2x(i\Delta t) + u(i\Delta t)) \\ O.F. = \frac{\Delta t}{2} u^2(0) + \Delta t \times u^2(\Delta t) + \cdots + \Delta t\, u^2((n-1)\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} u^2(n\Delta t) + (x(1) - 1{,}5)^2 \end{cases}$$